

I. Graphe

1. Modélisation

On peut modéliser les relations qu'il existe entre les utilisateurs d'un réseau social à l'aide d'un **graphe**. (Cette notion a déjà été vue)

C'est un **ensemble de points** (représentant les **utilisateurs**) et de **traits** (représentant les **relations d'amitiés** entre ces utilisateurs). Les points sont aussi appelés **sommets** et les traits **arêtes**.

Considérons un exemple un peu simpliste de réseau social comportant 6 utilisateurs : **Alice**, **Benjamin**, **Chloé**, **Dylan**, **Emma** et **Franck**. On fera référence à ses utilisateurs par les initiales **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**.

On a comme informations :

- **A est ami** avec **B**, **C** et **D**
- **B est ami** avec **A** et **D**
- **C est ami** avec **A**, **E** et **D**
- **D est ami** avec **tous** les autres abonnés
- **E est ami** avec **C**, **D** et **F**
- **F est ami** avec **E** et **D**

La description de ce réseau social, malgré son faible nombre d'abonnés, est déjà quelque peu rébarbative, alors imaginez cette même description avec un réseau social comportant des millions d'abonnés !

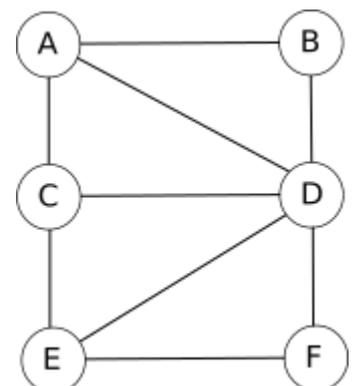
Il existe un moyen plus "**visuel**" pour représenter ce réseau social :

- on peut représenter chaque abonné par un **cercle** (avec le nom de l'abonné situé dans le cercle)
- et chaque relation "X est ami avec Y" par un **segment de droite** reliant X et Y ("X est ami avec Y" et "Y est ami avec X" étant représenté par le même segment de droite).

Voici ce que cela donne avec le réseau social décrit ci-dessus :

Ce genre de figure s'appelle un **graphe**. Les graphes sont des objets mathématiques très utilisés, notamment en informatique.

Graphe 1



2. Définitions

Voici quelques définitions sur les graphes :

degré :

Dans un graphe, le **degré d'un sommet** est le **nombre d'arêtes** dont il est l'extrémité

exemple : Dans le graphe donné ci-dessus (graphe 1), *A est de degré 3, D est de degré 5.*

chaîne :

Dans un graphe, une **chaîne** reliant un sommet x à un sommet y est définie par une **suite finie d'arêtes consécutives**, reliant x à y.

exemple : Dans le graphe donné ci-dessus (graphe 1), *A-D-E-C est une chaîne*

distance entre 2 sommets :

La **distance** entre deux sommets d'un graphe est le **nombre minimum d'arêtes** d'une chaîne allant de l'un à l'autre.

exemple : *La distance entre le sommet A (graphe 1) et le sommet F est de 2* (chaîne A-D-F). ATTENTION : on parle bien du nombre minimum d'arêtes, A-D-E-F est aussi une chaîne entre A et F mais dans ce cas, nous avons 3 arêtes.

excentricité (écartement):

L'**excentricité** d'un sommet est la **distance maximale** existant entre ce sommet et les autres sommets du graphe.

exemple 1 : Toujours dans le graphe 1 :

distance (A-B) = 1 ; distance (A-C) = 1 ; distance (A-D) = 1 ;
distance (A-E) = 2 ; distance (A-F) = 2 ; nous pouvons donc dire
que la distance maximale existant entre le sommet A et les autres
sommets du graphe est de 2 (distance (A-E) et distance (A-F)).
Nous pouvons donc dire que *l'excentricité de A est de 2.*

exemple 2 :

distance (D-A) = 1 ; distance (D-B) = 1 ; distance (D-C) = 1 ;
distance (D-E) = 1 ; distance (D-F) = 1 ; nous pouvons donc dire
que *l'excentricité de D est de 1.*

centre :

On appelle **centre d'un graphe**, le **sommet d'excentricité minimale** (le centre n'est pas nécessairement unique).

exemple : Dans le graphe 1 *tous les sommets ont une excentricité de 2* à l'exception du sommet *D qui a une excentricité de 1*, nous pouvons donc affirmer que le **centre du graphe 1 est le sommet D**

rayon :

On appelle **rayon** d'un graphe G, l'**excentricité** d'un **centre du graphe G**.

exemple : *D a une excentricité de 1*, c'est *le centre du graphe 1*, nous pouvons donc dire que le **rayon du graphe 1) est de 1**.

diamètre :

On appelle **diamètre** d'un graphe G, la **distance maximale entre deux sommets** du graphe G.

exemple : Dans le graphe 1 la distance maximale entre 2 sommets est de 2, nous pouvons donc dire que le diamètre du graphe est de 2.

3. Utilisation de tableaux**Tableau de distance entre chaque sommet (nœud).**

On crée un tableau contenant la distance entre chacun des sommets du graphe. On peut en déduire le **diamètre** d'un graphe en utilisant la **distance entre deux sommets** du graphe.

exemple : A partir du graphe 1

	A	B	C	D	E	F
A est en relation avec	0	1	1	1	2	2
B est en relation avec	1	0	2	1	2	2
C est en relation avec	1	2	0	1	1	2
D est en relation avec	1	1	1	0	1	1
E est en relation avec	2	2	1	1	0	1
F est en relation avec	2	2	2	1	1	0

La distance maximale est de 2, donc le **diamètre de ce graphe est de 2**

Tableau d'excentricité

A partir de ce tableau, on peut en déduire le **centre** et le **rayon** du graphe.

exemple : A partir du graphe 1

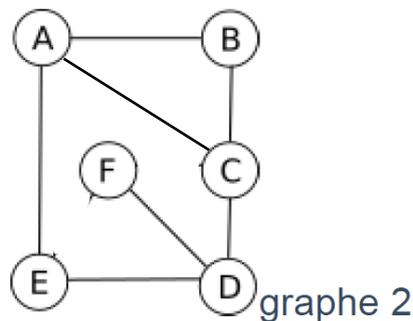
Sommet	A	B	C	D	E	F
Excentricité	2	2	2	1	2	2

Le **centre** du graphe est le **sommet D** et son **rayon** est de **1**.

II. Exercices

Exercice 1

Soit le graphe ci-contre :



En utilisant des tableaux, déterminez :

- 1) le diamètre du graphe 2.
- 2) le (ou les) centre(s) du graphe 2, en déduire le rayon du graphe 2.

Exercice 2

1) Construisez un graphe de réseau social à partir des informations suivantes :

- A est ami avec B et E
- B est ami avec A et C
- C est ami avec B, F et D
- D est ami avec C, F et E
- E est ami avec A, D et F
- F est ami avec C, D et E

2) En utilisant des tableaux, déterminez :

- a) le diamètre de ce graphe.
- b) le (ou les) centre(s) de ce graphe, en déduire le rayon du graphe.