REPRÉSENTATION DES NOMBRES

Exercice 1 :

1) Déterminer la représentation binaire de :

(a) $(5{,}1875)_{10}$.

On a $5 = (101)_2$

Conversion de 0,1875 :

$0{,}1875 \times 2 = 0{,}375 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}375$
$0{,}375 \times 2 = 0{,}75 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}75$
$0{,}75 \times 2 = 1{,}5 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}5$
$0{,}5 \times 2 = 1{,}0 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}0$

Donc $0{,}1875 = (0{,}0011)_2$

On a donc $5{,}1875 = (101{,}0011)_2$

(b) $(4{,}125)_{10}$

On a $4 = (100)_2$

Conversion de 0,125 :

$0{,}125 \times 2 = 0{,}25 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}25$
$0{,}25 \times 2 = 0{,}5 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}5$
$0{,}5 \times 2 = 1{,}0 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}0$

Donc $0{,}125 = (0{,}001)_2$

On a donc $4{,}125 = (100{,}001)_2$

(c) $(3{,}625)_{10}$

On a $3 = (11)_2$

Conversion de 0,625 :

$0{,}625 \times 2 = 1{,}25 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}25$
$0{,}25 \times 2 = 0{,}5 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}5$
$0{,}5 \times 2 = 1{,}0 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}0$

Donc $0{,}625 = (0{,}101)_2$

On a donc $3{,}625 = (11{,}101)_2$

(d) $(\frac{11}{16})_{10}$

On a $\frac{11}{16} = 0{,}6875$

$0{,}6875 \times 2 = 1{,}375 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}375$
$0{,}375 \times 2 = 0{,}75 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}75$
$0{,}75 \times 2 = 1{,}5 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}5$
$0{,}5 \times 2 = 1{,}0 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}0$

Donc $0{,}6875 = (0{,}1011)_2$

On a $\frac{11}{16} = (0{,}1011)_2$

2) Trouvez la représentation binaire de $(0{,}1)_{10}$
Que remarquez-vous ?

Conversion de 0,1 :

$0{,}1 \times 2 = 0{,}2 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}2$
$0{,}2 \times 2 = 0{,}4 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}4$
$0{,}4 \times 2 = 0{,}8 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}8$

$0{,}8 \times 2 = 1{,}6 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}6$
$0{,}6 \times 2 = 1{,}2 = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}2$
$0{,}2 \times 2 = 0{,}4 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}4$
$0{,}4 \times 2 = 0{,}8 = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}8$
…. Le calcul est infini.

On n'a pas une valeur fini de la représentation de 0,1 en base 2.
Donc $0{,}1 = (0{,}0\underline{0011}\ 0011\ 0011\ 0011\ \dots)_2$

3) a) Donner la représentation binaire de la fraction $\frac{11}{16}$

On a $\frac{11}{16} = (0{,}1011)_2$

b) Donner la représentation binaire de la fraction $\frac{11}{15}$

On a $\frac{11}{15} \approx 0{,}7333\dots$
$0{,}7333\dots \times 2 = 1{,}4666\dots = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}4666\dots$
$0{,}4666\dots \times 2 = 0{,}9333\dots = \underline{\mathbf{0}} + 0{,}9333\dots$
$0{,}9333\dots \times 2 = 1{,}8666\dots = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}8666\dots$
$0{,}8666\dots \times 2 = 1{,}7333\dots = \underline{\mathbf{1}} + 0{,}7333\dots$ On retrouve la même valeur.

On a $\frac{11}{15} = (0{,}\underline{1011}101110011\dots)_2$ La représentation est infini.

c) Donner le début du développement dyadique de la somme $\frac{11}{16}+\frac{11}{15}$

On a $\frac{11}{16}+\frac{11}{15} \approx (1{,}\ 0110\underline{1011}1011\dots)_2$

Le nombre affiché par un ordinateur sera-t-il représentatif de cette somme.
Non, cela ne va être qu'une valeur approchée.

4) Trouver la représentation décimale des nombres binaires suivants :
(a) $(100{,}001)_2$

On a $(100)_2 = 4$ et $(0{,}001)_2 = \frac{1}{2^3} = 0{,}125$, soit $(100{,}001)_2 = 4{,}125$

(b) (b) $(1011{,}0111)_2$

On a $(1011)_2 = 11$ et $(0{,}0111)_2 = \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} = 0.25 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 0{,}4375$
Soit $(1011{,}0111)_2 = 11{,}4375$

Complément

En base dix, il est possible d'écrire les très grands nombres et les très petits nombres grâce aux "**puissances de dix**" (exemples "$\mathbf{6{,}02.10^{23}}$" ou "$\mathbf{6{,}67.10^{-11}}$").

Il est possible de faire exactement la même chose avec une représentation binaire, puisque **nous sommes en base 2**, nous utiliserons des "**puissances de deux**" à la place des "puissances dix" (exemple "$101{,}1101.2^{10}$").

Pour passer d'une écriture sans "puissance de deux" à une écriture avec "puissance de deux", il suffit de décaler la virgule : "1101,1001 = $1{,}1011001.2^{11}$".
Pour passer de "1101,1001" à "1,1011001" nous avons **décalé la virgule de 3 rangs vers la gauche** d'où le "2^{11}"
(attention de ne pas oublier que nous **travaillons en base 2** le "**11**" correspond bien à un **décalage de 3** rangs de la virgule).
Si l'on désire décaler la virgule vers **la gauche**, il va être nécessaire d'utiliser des "**puissances de deux négatives**"
Exemple "0,0110 = $1{,}10.2^{-10}$", nous décalons la virgule de 2 rangs vers la droite, d'où le "–10"

Exercice 2 :

On utilise la norme IEEE 754.

1) Déterminez la représentation flottante binaire au format simple précision (*32 bits*) de :
   (a) $(0{,}25)_{10}$

   $(0{,}25)_{10} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$ Soit $0{,}25 = 1{,}0 \times 2^{-2}$

   On a :
   - s = 0 , le nombre est positif
   - m = 0 , la mantisse est nulle
   - l'exposant est e = 127 + (–2) = 125 soit 125 = $(0111\ 1101)_2$

   Donc $(0{,}25)_{10}$ = 0 01111101 00000000000000000000000

   (b) (b) $(128)_{10}$
   $128 = 1{,}0 \times 2^7$
   On a :
   - s = 0 , le nombre est positif
   - m = 0 , la mantisse est nulle
   - l'exposant est e = 127 + 7 = 134 soit 134 = $(1000\ 0110)_2$

   Donc $(128)_{10}$ = 0 10000110 00000000000000000000000

   (c) (c) $(–32{,}75)_{10}$

   $32 = (100000)_2$ et $0{,}75 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = (0{,}11)_2$

   Donc $32{,}75 = (100000{,}11)_2 = 1{,}0000011 \times 2^5$
   On a :
   - s = 1 , le nombre est négatif
   - m = 00000110000000000000000
   - l'exposant est e = 127 + 5 = 132 soit 132 = $(1000\ 0100)_2$

   Donc $(–32{,}75)_{10}$ = 1 10000100 00000110000000000000000

2) Soit le nombre flottant au format simple précision : 0 01111011 10011001100110011001100.
Trouvez la représentation en base 10 de ce nombre.
Que remarquez-vous ?
   On a :
   - s = 0 , le nombre est positif

- $(01111011)_2 = 123$ donc $e = 123 - 127 = -4$
- $(10011001100110011001100)_2$;

  $m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{2^{17}}+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{2^{21}} \approx 1{,}5999999046$
- Le nombre codé en base 10 est $1{,}5999999046 \times 2^{-4} = 0{,}099999994$

La réponse à la question posée ci-dessus est $(0{,}099999994)_{10}$, or, en toute logique, nous devrions trouver $(0{,}1)_{10}$.
Cette "légère" erreur est logique quand on y réfléchit un peu. N'oubliez qu'à cause de la limitation de la mantisse à 23 bits, nous avons dû "tronquer" notre résultat (de toutes les façons, même avec une mantisse beaucoup plus grande, on aurait aussi eu le problème, car le schéma "0011" se répète à l'infini).

3) Donner la valeur décimale des nombres flottants suivants, codés en simple précision :

a) 1 01111110 11110000000000000000000

On a :

- $s = 1$, le nombre est négatif
- $(01111110)_2 = 126$ donc $e = 126 - 127 = -1$
- $(11110000000000000000000)_2$;

  $m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4} \approx 1{,}9375$
- De plus $1{,}9375 \times 2^{-1} = 0{,}96875$
- **Le nombre codé en base 10 est – 0,96875**

b) 0 10000011 11100000000000000000000

On a :

- $s = 0$, le nombre est positif

(On a :

- $s = 1$, le nombre est négatif
- $(01111110)_2 = 131$ donc $e = 131 - 127 = 4$
- $(11100000000000000000000)_2$;

  $m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3} \approx 1{,}875$
- De plus $1{,}875 \times 2^4 = 30$
- **Le nombre codé en base 10 est 30**