Terminale NSI — TP - Les Tours de Hanoï — Récursivité

Les « **tours de Hanoï** » est un jeu imaginé par le mathématicien français Édouard Lucas (1842-1891).
Il consiste à déplacer ***n*** disques de diamètres différents d'une tour de « ***départ*** » à une tour d'« ***arrivée*** » en passant par une tour « ***intermédiaire*** » et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :

- on ne peut déplacer qu'**un disque à la fois**,
- on ne peut placer un disque que sur un **autre disque plus grand** que lui ou sur une **tour vide**.

Dans l'*état initial*, les ***n*** disques sont placés sur la tour « départ ».
Dans l'*état final*, tous les disques se retrouvent placés ***dans le même ordre*** sur la tour « arrivée ».

Exemple

Pour n = 3, on à la configuration suivante :

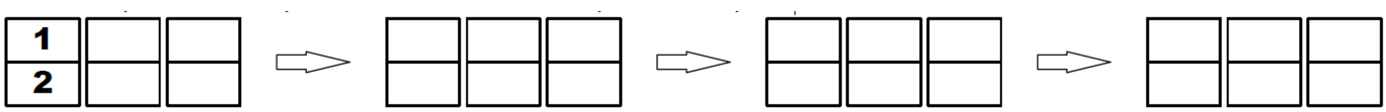
Tours de Hanoï : état initial

Tours de Hanoï : état final

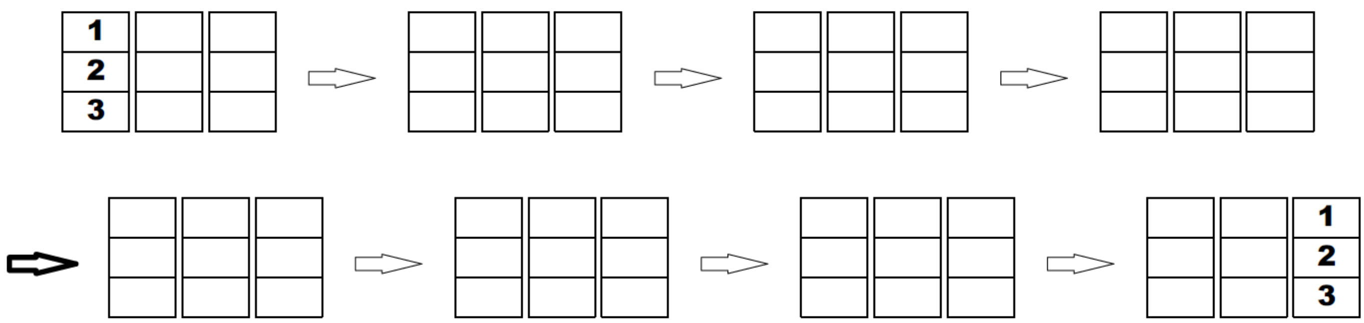
Questions

Pour ces deux questions, les disques seront notés ; 1 , 2 , 3 .

a) Complétez les déplacements nécessaires pour 2 disques :



b) Résoudre à la main le problème pour 3 disques



Évidemment la solution “trouvée à la main” peut être **programmé** ou généralisé à un **nombre quelconque de disque**, mais le recours à la récursivité permet d’écrire un algorithme beaucoup plus simple.

Algorithme récursif

L'idée est de dire que pour **déplacer *n* disques**, on peut auparavant déplacer les ***n* – 1 disques** supérieurs.
De même pour déplacer ***n* – 1 disques**, on peut auparavant déplacer ***n* – 2 disques**.
Ainsi de suite jusqu'à ne plus avoir de disque.
Donc, si on sait déplacer *n* – 1 disques d'un piquet à un autre, il suffit de déplacer "correctement" le n^{eme} disque.

On cherche donc à définir une procédure :

`hanoi(n,depart,intermediaire,arrivee)`

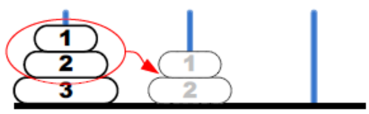
qui devra déplacer `n` disques de la tour `depart` à la tour `arrivee` en utilisant la tour `intermediaire` comme tour de transit.

A un moment donné, dans la suite des opérations à effectuer, il faudra déplacer le disque numéro ***n*** (le plus grand, placé initialement en dessous de la pile de disques) de la tour « départ » à la tour « arrivée ».
Pour pouvoir effectuer ce déplacement, il faut d'une part qu'il n'y ait **plus aucun disque** sur le disque ***n*** et d'autre part que la **tour « arrivée » soit vide**.
En conséquence, il faut que tous les autres disques (de 1 à (*n*−1)) soient sur la tour « intermédiaire ».

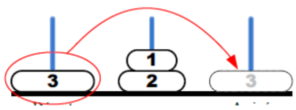
- Pour atteindre cet état intermédiaire (noté a sur la figure ci-dessous) :

Tours de Hanoï : état intermédiaire a

Il faut donc déplacer les **(*n*−1) premiers disques** de la tour « départ » à la tour « intermédiaire » en utilisant la tour « arrivée » comme tour de transit : ce déplacement correspond à l'appel `hanoi(n-1,depart,arrivee,intermediaire)`.



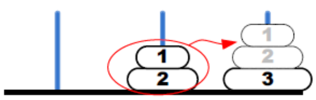
- Une fois réalisé ce déplacement des (*n*−1) premiers disques, le disque *n* peut être déplacé de la tour « départ » à la tour « arrivée »



On obtient l'état intermédiaire b sur la figure ci-dessous :

Tours de Hanoï : état intermédiaire b

- Il ne reste plus qu'à déplacer les (*n*−1) premiers disques de la tour « intermédiaire » à la tour « arrivée » en utilisant la tour « départ » comme tour de transit.
  Ces derniers déplacements correspondent à l'appel `hanoi(n-1,intermediaire,depart,arrivee)`.



Travail :

Déduire des informations précédentes l'implémentation de la procédure

`hanoi(n,depart,intermediaire,arrivee)`

où déplacement y est traduit par un simple affichage du type :

`déplacer disque 3 de la tour « départ » à la tour « arrivée »`.

Attention, pensez à définir une condition d’arrêt.